УДК 517.983.54

В. В. Ключев
V. V. Kljuchev

Марийский государственный университет, г. Йошкар-Ола
Mari State University, Yoshkar-Ola

АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕРЕГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПО НАБЛЮДАЕМОЙ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ НЕВЯЗКИ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ

A POSTERIORI ESTIMATION OF SMOOTHNESS OF LINEAR IRREGULAR OPERATOR EQUATION IN HILBERT SPACE FROM THE OBSERVED CONVERGENCE RATE OF DISCREPANCY OF ITERATION METHOD FOR APPROXIMATE SOLUTION

Рассматривается применение простейшего явного итерационного метода для приближенного решения линейного нерегулярного операторного уравнения в гильбертовом пространстве. В случае интегрального уравнения первого рода с оператором Грина краевой задачи для ОДУ второго порядка применение итерационного метода приближенного решения иллюстрирует теоретически известную зависимость между скоростью сходимости невязки метода и гладкостью решения задачи.

The elementary explicit iteration method for approximate solution of linear irregular operator equation in Hilbert space is under consideration. In case of the integral equation of the first kind with Green operator of boundary problem for second order ODE the application of the iteration method for approximate solution illustrates the dependence between smoothness of the problem solution and convergence rate of the iteration method discrepancy, well-known in theory.

Ключевые слова: операторное уравнение, некорректная задача, итерационный метод, истокообразное представление, скорость сходимости.

Key words: operator equation, ill-posed problem, iteration method, sourcewise representation, convergence rate.

1. Рассматривается уравнение

$$Ax = f\ ,\ \ f \in H\ , \tag{1}$$

где $A \in L(H)$ — самосопряженный неотрицательный оператор в гильбертовом пространстве H. Здесь не предполагается существования для оператора A непрерывного обратного, определенного на всем H, так что задача (1) в общем случае является некорректно поставленной. Для аппроксимации решения задачи (1) применяется метод простой итерации

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \mu_0\left(Ax^{(n)} - f\right),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{2}$$

$$x^{(0)} = \xi \in H\ ,\ \mu_0 > 0\ .$$

В условиях некорректности задачи (1) сходимость итераций (2) к точному решению x^* если и имеет место, то может быть сколь угодно медленной [3]. То же относится и к скорости сходимости невязки $\left\|Ax^{(n)} - f\right\|_H$. Для установления квалифицированных оценок скорости сходимости приближений к решению и невязки метода к нулю используются априорные условия типа истокообразной представимости начальной невязки

$$x^* - \xi \in R\left(A^p\right),\ p > 0\ . \tag{3}$$

Здесь $R(\cdot)$ обозначает образ оператора, вещественная степень оператора A^p понимается в смысле исчисления самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

Имеет место следующее известное утверждение [1, с. 33–37; 3, с. 42]:

Теорема 1. *Пусть приближения к решению* x^* *уравнения (1) порождаются методом (2) и имеет место истокообразное представление начальной невязки (3). Тогда существует* $C_1 = C_1(A, f, \mu_0, \xi) > 0$ *такая, что имеет место оценка*

$$\left\|Ax^{(n)} - f\right\|_H \le C_1 n^{-p-1},\ n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{4}$$

Утверждение, аналогичное теореме 1, справедливо также для линейных некорректных уравнений с секториальным оператором в банаховом пространстве [2]. Представляет интерес вопрос о необходимости условий вида (3) для выполнения оценок (4). Для уравнений в гильбертовом пространстве имеет место следующая теорема.

Теорема 2 [2, с. 32]. *Пусть приближения к решению* x^* *уравнения (1) порождаются методом (2) при фиксированных* $\xi \in H$, $\mu_0 > 0$ *и выполняется оценка (4) скорости сходимости невязки метода. Тогда имеет место включение*

$$x^* - \xi \in R\left(A^q\right)\ \ \forall q \in (0,\ p)\ . \tag{5}$$

В статье рассматривается работа метода (2) в случае, когда оператор A является оператором Грина краевой задачи для обыкновенного уравнения второго порядка. Как известно, условия истокообразной представимости вида (3), (5) в этом случае интерпретируются как условия гладкости решения краевой задачи. Сопоставляя наблюдаемую скорость стремления к нулю невязки метода и гладкость решения в модельных примерах, мы оцениваем возможность апостериорной оценки гладкости решения по данным вычислений.

2. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} L(y)\equiv -\left(p(t)y'\right)' + q(t)y = x(t), \quad a<t<b, \\ y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0, \; y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь даны $p(t)>0,\ q(t)\ge 0$, $\alpha,\ \beta\in\left[0,\ 2\pi\right)$. При подходящем выборе коэффициентов $p,\ q$ и параметров α,β, дифференциальное выражение $L(y)$ вместе с граничными условиями из (6) определяет (неограниченный) позитивный оператор Λ, который мы будем рассматривать как действующий из пространства Соболева $H^2(a,b)$ функций, имеющих интегрируемую в квадрате обобщенную производную второго порядка, в $L_2(a,b)$ [4]. Если $G(t,s)$ есть функция Грина соответствующей (6) однородной задачи и эта задача имеет только тривиальные решения, то все дважды непрерывно дифференцируемые на отрезке $\left[a,\ b\right]$ решения (6) имеют вид

$$y(t)=\int_a^b G(t,s)x(s)ds . \tag{7}$$

Определим линейный интегральный оператор $A: L_2(a,b)\to L_2(a,b)$ как обратный для оператора Λ. На элементе $u\in L_2(a,b)$ он действует по формуле

$$\left(Au\right)(t)=\int_a^b G(t,s)u(s)ds .$$

В этих обозначениях задача восстановления правой части $x(t)$ дифференциального уравнения по известному решению $y(t)$ принимает вид операторного уравнения

$$Ax=y,\quad y\in H . \tag{8}$$

Заметим, что оператор A^p действует из $L_2(a,b)$ в $H^{2p}(a,b)$ [4, с. 453].

3. В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} -\ddot{y} + a^2 y = x(t), \quad -1<t<1, \\ y(-1)=0,\ y(1)=0 \end{cases}$$

при постоянной $a>0$. В этом случае дифференциальный оператор задачи будет позитивным эллиптическим [4]. При $x(t)=a^2-\left| t\right|^{\alpha-2}\left(\alpha(\alpha-1)-a^2t^2\right)$ точным решением этой задачи является функция $y(t)=1-\left| t\right|^{\alpha}$. Функция Грина данного дифференциального оператора есть

$$G(t,s)=\frac{ch\left(a\cdot\left(2-\left|t-s\right|\right)\right)-ch\left(a\cdot\left(t+s\right)\right)}{2a\cdot sh(2a)}, \quad -1\le t,\ s\le 1 .$$

Если обозначить

$$\left(Ax\right)(t)=\int_{-1}^{1} G(t,s)x(s)ds ,$$

то задача восстановления правой части $x(t)$ дифференциального уравнения по известному точному решению $y(t)$ принимает вид интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода $Ax=y$. Класс гладкости решения задачи определяется показателем α. Так, при $\alpha\in(k+3/2,\ k+5/2),\ k\in N$ имеем во всяком случае $x\in H^k(-1,\ 1)$.

Для приближенного решения этого уравнения используем метод (2) и будем наблюдать скорость стремления к нулю невязки метода при различных показателях α. Количественную оценку скорости сходимости мы будем проводить, ориентируясь на степенной характер убывания правой части в неравенстве (4). Для этого мы применяем конструкцию с использованием разностной аппроксимации логарифмической производной

$$(p+1)^{(n)} = n\cdot\left(\ln\left\|Ax^{(n-1)}-f\right\|_H - \ln\left\|Ax^{(n)}-f\right\|_H\right),$$

поскольку $\left(\ln(C_1x^{-p-1})\right)'\cdot x = p+1$.

На рисунке 1 значение эмпирического показателя при $\alpha=3{,}2$ стабилизируется с ростом числа проведенных итераций на отметке приблизительно 1,5. Считая, что в этом случае $p+1=1{,}5$, получаем $p=0{,}5$. Далее, по теореме 2 делаем вывод, что $x^*\in R\left(A^{0,5}\right)$, т. е. что $x(t)\in H^1(-1,\ 1)$. Это соответствует истинному положению: в нашем случае $x(t)=1-\left| t\right|^{1,2}(7{,}04-t^2)$. При $\alpha=5{,}2$ на рисунке 3 наблюдаем $p+1=2$ и аналогичные рассуждения приводят к выводу $x(t)\in H^2(-1,\ 1)$. Это справедливо для точного решения $x(t)=1-\left| t\right|^{3,2}(21{,}84-t^2)$. Итак, в рассматриваемом случае с повышением показателя гладкости решения α наблюдается повышение показателя p в оценке скорости сходимости невязки итерационного метода (2). Отметим, что гарантированный класс гладкости точного решения интегрального уравнения эмпирическим показателем гладкости определяется как несколько заниженный.

Показатели $(p+1)^{(n)}$ на рисунках 1–4 получены при $a=1$, $\mu_0=0{,}4$ и тождественно постоянном на $\left[-1,\ 1\right]$ начальном приближении. Интегралы вычисляются методом Симпсона при разбиении отрезка $\left[-1,\ 1\right]$ на 100 равных частей.

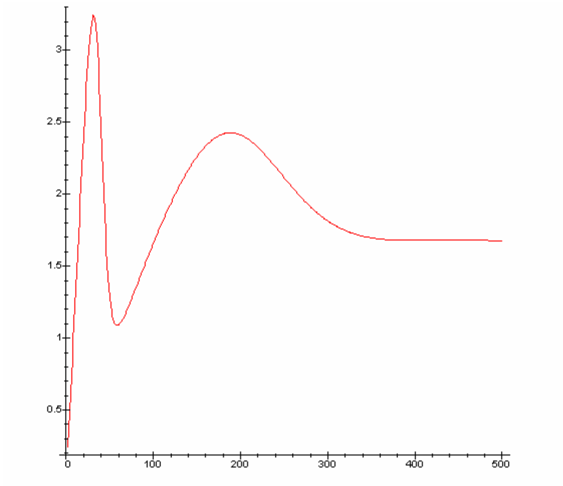


Рис. 1 — Оценка показателя скорости убывания невязки в зависимости от номера итерации, $\alpha = 3,2$

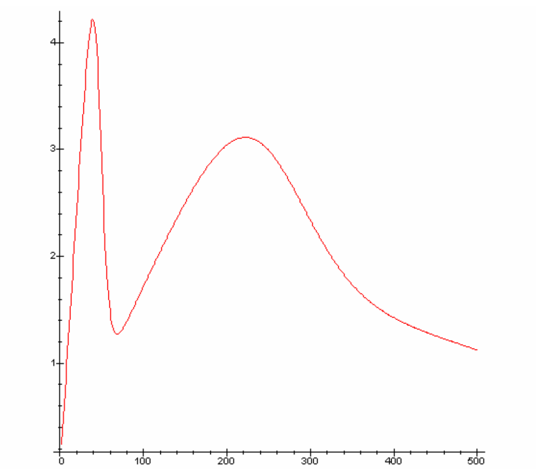


Рис. 2 — Оценка показателя скорости убывания невязки в зависимости от номера итерации, $\alpha = 4,2$

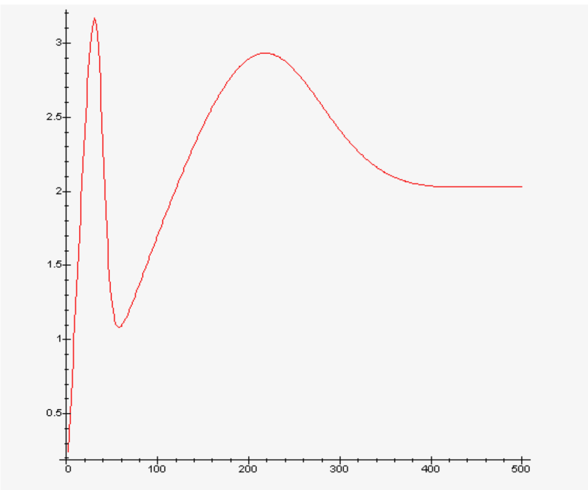


Рис. 3 — Оценка показателя скорости убывания невязки в зависимости от номера итерации, $\alpha = 5,2$

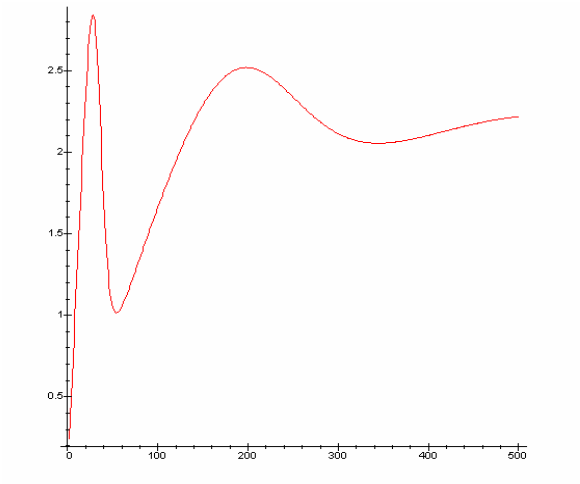
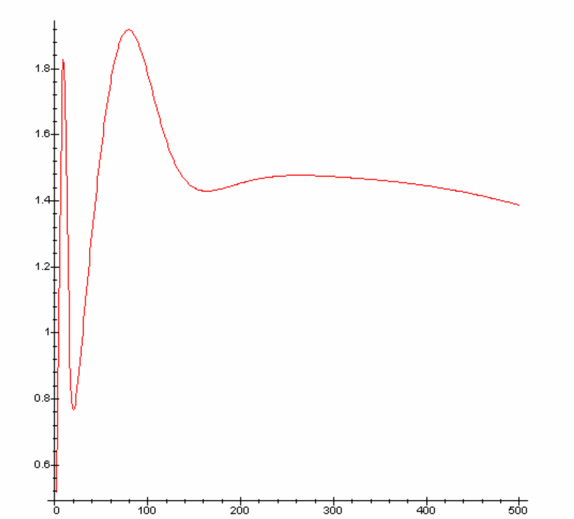
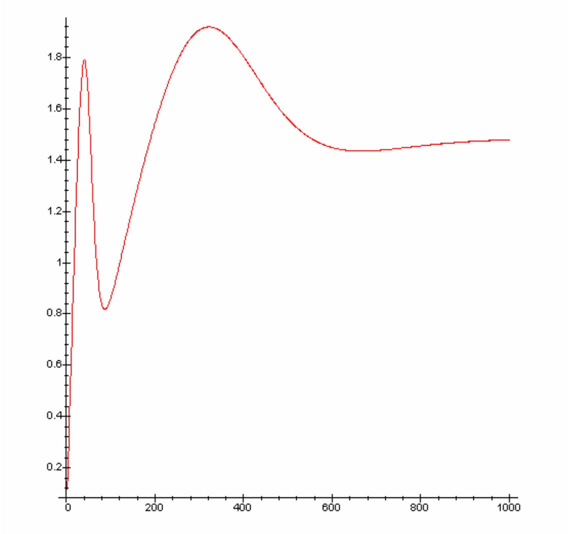


Рис. 4 — Оценка показателя скорости убывания невязки в зависимости от номера итерации, $\alpha = 6,2$



а)



б)

Рис. 5 — Эмпирический показатель скорости сходимости, $\alpha = 2{,}5$;
а) $\mu_0 = 0,2$, б) $\mu_0 = 0,8$

В проведенных вычислениях варьировались также шаговые множители итерационного метода μ_0, значения постоянной, являющейся начальным приближением $x^{(0)}$, а также плотность разбиения отрезка интегрирования. Отметим, что на больших номерах итераций значение эмпирического показателя скорости сходимости падает, что можно отнести к сопоставимости величин невязки итерационного метода и погрешности дискретизации. При варьировании шагового множителя эмпирическая кривая, как правило, испытывает преобразование растяжения вдоль оси абсцисс (рис. 5).

Более существенным при исследовании свойств гладкости выглядит показатель плотности разбиения отрезка задания решения. Однако значительное увеличение этого параметра сдерживается вычислительными возможностями при применяемом в работе способе вычисления.

Литература

1. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Итеративные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1989.

2. *Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю.* Итерационные методы решения нерегулярных уравнений с гладкими операторами. — М.: УРСС, 2002.

3. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. — М.: Наука, 1986.

4. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.