

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

УДК 519.633.9

М. Ю. Кокурин, С. К. Паймеров

M. Yu. Kokurin, S. K. Paimerov

Марийский государственный университет, г. Йошкар-Ола

Mari State University, Yoshkar-Ola

О КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА НА ГРАНИЦЕ

ON A COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION IN A BOUNDED DOMAIN WITH A BOUNDARY CONDITION OF THE THIRD KIND

Исследуется нелинейная коэффициентная обратная задача для волнового уравнения в трехмерной ограниченной области с условием третьего рода на границе. По семейству решений уравнения, заданному на замкнутой поверхности, лежащей внутри исходной области, требуется реконструировать коэффициент при второй производной по времени, определяющий скорость звука в неоднородной среде. Рассматриваемая обратная задача сводится к линейному интегральному уравнению первого рода, устанавливается однозначная разрешимость полученного уравнения. Приводится результат численного эксперимента.

The article deals with the study of the nonlinear coefficient inverse problem for the wave equation in a 3D bounded domain with a boundary condition of the third kind. Given a family of equation solutions on a closed surface inside the domain, it is required to recover the coefficient at the second time derivative which determines sound velocity profile in the inhomogeneous medium. The inverse problem under examination is reduced to the linear integral equation of the first kind. The authors establish the unique solvability of the obtained equation and provide results of the numerical experiment.

Ключевые слова: обратная задача, некорректная задача, волновое уравнение, линейное интегральное уравнение.

Key words: inverse problem, ill-posed problem, wave equation, linear integral equation.

1. Постановка задачи. Объектом исследования в работе является нелинейная обратная задача определения скорости звука в неоднородности, локализованной в пределах трехмерной ограниченной области, по данным о рассеянном этой неоднородностью скалярном акустическом поле. Акустические колебания в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ описываются волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) - f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0, \quad x \in \Omega \quad (1.2)$$

и краевым условием третьего рода на границе $\Sigma = \partial\Omega$:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \sigma(x) u(x, t) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

Здесь $u(x, t)$ — акустическое давление в точке $x \in \Omega$ в момент времени t , величина $c(x) > 0$ опре-

деляет скорость звука в этой точке; $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали n к границе Σ , вычисленная со стороны области Ω . Исследуемая обратная задача заключается в определении коэффициента $c(x)$ по результатам наблюдения рассеянного на неоднородности поля $u(x, t)$. Предполагается, что среда, заполняющая область Ω , однородна вне некоторой априори заданной подобласти R , $\bar{R} \subset \Omega$, так что $c(x) = c_0$ при $x \in \bar{\Omega} \setminus R$, где константа c_0 известна, а функция $c = c(x)$ при $x \in R$ подлежит определению; $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$. Наблюдение рассеянного поля проводится в точках гладкой замкнутой поверхности $Y \subset \Omega$, не пересекающейся с \bar{R} .

Обратная коэффициентная задача применительно к задаче Коши для волнового уравнения во всем пространстве \mathbb{R}^3 исследовалась ранее в [1], обратная за-

дача для двумерного волнового уравнения — в [3]. Задача определения $c(x)$ в начально-краевой задаче для трехмерного волнового уравнения в ограниченной области с условием Дирихле на границе была исследована в [4]. В [1; 3; 4] была предложена методика сведения этих нелинейных обратных задач к линейным интегральным уравнениям первого рода. В настоящей работе развитая в [1; 3; 4] техника модифицируется применительно к начально-краевой задаче (1.1–1.3).

2. Редукция к линейному интегральному уравнению. Очевидно, что отыскание функции $c(x)$, $x \in R$, характеризующей скорость звука в среде, эквивалентно нахождению

$$\xi(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{1}{c_0^2}, \quad x \in R. \quad (2.1)$$

Будем предполагать, что $\xi \in C^2(\bar{\Omega})$, граница $\Sigma \in C^2$, $\sigma \in C^1(\Sigma)$, $\sigma(x) > 0 \quad \forall x \in \Sigma$. Считаем, что зондируемая неоднородность облучается волновыми полями, источники которых описываются функциями $f(x, t; q) = \varphi(x; q) g(t)$, причем $\varphi(\cdot; q) \in C^2(\bar{\Omega}) \quad \forall q \in Q$.

Обозначим через $S(q)$ носитель функции $\varphi(\cdot; q)$, совпадающий с замыканием множества $\{x \in \Omega: \varphi(x; q) \neq 0\}$, $q \in Q$. Всюду ниже предполагаются выполненными следующие условия.

Условие 1. Имеют место соотношения

$$\left(\bigcup_{q \in Q} S(q) \right) \cap \bar{R} = \emptyset, \quad Y \cap \bar{R} = \emptyset.$$

Условие 2. Функция $g \in C^2[0, \infty)$ и выполняются соотношения

$$\int_0^\infty g(t) dt \neq 0; \quad |g(t)| \leq C_1 e^{-\beta t} \quad \forall t \geq 0 \quad (\beta > 0);$$

$$\sup_{t \geq 0} |g^{(k)}(t)| < \infty, \quad k = 1, 2; \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0.$$

Здесь и далее в работе C_1, C_2, \dots — положительные абсолютные константы.

Сформулируем постановку рассматриваемой обратной задачи. Обозначим через $u(x, t; q) = u(x, t)$ решение задачи (1.1–1.3), понимаемое в классическом смысле. Предполагается, что для наблюдения доступны значения $u(x, t; q)$ при $t \geq 0$, $x \in Y$, $q \in Q$. По этим данным требуется определить $c(x)$, $x \in R$ или, что то же, функцию $\xi(x)$, $x \in R$.

Напомним, что преобразованием Лапласа непрерывной функции $F: [0, \infty) \rightarrow B$, принимающей значения в банаховом пространстве B с нормой $\|\cdot\|_B$, называется функция $\tilde{F}: C \rightarrow B$, $\tilde{F}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t) dt$, $p \in C$.

Известно (см., например, [6, с. 145–146]), что если выполняется оценка $\|F(t)\|_B \leq C_2 e^{\mu t}$, $t \geq 0$, то функция \tilde{F} аналитична в полуплоскости $C_\mu = \{p \in C: \operatorname{Re} p > \mu\}$.

Аналогично рассуждениям из [4], получаем, что для любого $q \in Q$ функция $t \rightarrow u(\cdot, t; q)$, рассматриваемая как отображение из $[0, \infty)$ в $C^2(\bar{\Omega})$, обладает преобразованием Лапласа $p \rightarrow \tilde{u}(\cdot, p; q)$, аналитическим по p в полуплоскости C_a при достаточно большом $a > 0$. При этом функция $v(x, p; q) = \tilde{u}(x, p; q)$, $p \in C_a$ аналитически продолжима из полуплоскости C_a в открытую окрестность точки $p = 0$, т. е. $v: C \rightarrow W_2^2(\Omega)$ аналитична по переменной p в области D , содержащей открытую окрестность начала координат. Также $v(x, p; q)$ при $p \in C_0$ является преобразованием Лапласа функции $u(x, t; q)$, дающей решение задачи (1.1–1.3), т. е. $v(x, p; q) = \tilde{u}(x, p; q)$ при $p \in C_0$.

Вычисляя преобразование Лапласа от (1.1), с учетом (2.1) получаем

$$\Delta \tilde{u}(x, p; q) - \frac{p^2}{c_0^2} \tilde{u}(x, p; q) = \varphi(x; q) \tilde{g}(p) + p^2 \tilde{u}(x, p; q) \xi(x). \quad (2.2)$$

Обозначим через $G(x, x'; p)$, $p \in D$ функцию Грина краевой задачи третьего рода

$$\begin{cases} \Delta h(x) - \frac{p^2}{c_0^2} h(x) = r(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial h(x)}{\partial n} + \sigma(x) h(x) = 0, & x \in \Sigma. \end{cases}$$

По определению,

$$h(x) = \int_\Omega G(x, x'; p) r(x') dx', \quad x \in \Omega. \quad (2.3)$$

Пусть $O_\varepsilon = \{p \in C: |p| \leq \varepsilon\}$. Имеет место следующее утверждение [6, с. 429–433].

Лемма 1. Функция $G(x, x'; p)$ при $x \neq x'$ дважды непрерывно дифференцируема по $p \in D$, причем она сама и ее производные $G_p(x, x'; p)$, $G_{pp}(x, x'; p)$ равномерно ограничены по $(x, x') \in Y \times S(q)$ и $p \in O_{\varepsilon_0}$, где ε_0 таково, что $O_{\varepsilon_0} \subset D$.

Из (2.2), (2.3) с учетом равенств $\varphi(x; q) = 0$, $x \in \bar{\Omega} \setminus S(q)$ и $\xi(x) = 0$, $x \in \bar{\Omega} \setminus R$, получаем

$$\tilde{u}(x, p; q) - \tilde{g}(p) \int_{S(q)} G(x, x'; p) \varphi(x'; q) dx' = p^2 \int_R G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx'; \quad x \in Y, \quad q \in Q. \quad (2.4)$$

Используя лемму 1, продифференцируем дважды обе части (2.4) по $p \in C_0$:

$$\begin{aligned} & \tilde{u}_{pp}(x, p; q) - \tilde{g}(p) \int_{S(q)} G_{pp}(x, x'; p) \varphi(x'; q) dx' - \\ & - 2\tilde{g}'(p) \int_{S(q)} G_p(x, x'; p) \varphi(x'; q) dx' - \\ & - \tilde{g}''(p) \int_{S(q)} G(x, x'; p) \varphi(x'; q) dx' = \\ & = p^2 \int_R (G_{pp}(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') + \\ & + 2G_p(x, x'; p) \tilde{u}_p(x', p; q) \xi(x') + \\ & + G(x, x'; p) \tilde{u}_{pp}(x', p; q) \xi(x')) dx' + \\ & + 4p \int_R (G_p(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') + G(x, x'; p) \tilde{u}_p(x', p; q) \xi(x')) dx' + \\ & + 4p \int_R (G_p(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') + G(x, x'; p) \tilde{u}_p(x', p; q) \xi(x')) dx' + \\ & + 2 \int_R G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx'; \quad x \in Y, \quad q \in Q. \end{aligned} \quad (2.5)$$

С учетом аналитичности функции $v(x, p; q)$ в окрестности точки $p = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} v_{pp}(x, p; q) &= v_{pp}(x, 0; q) \quad \lim_{p \rightarrow 0, \operatorname{Re} p > 0} \tilde{u}_{pp}(x, p; q) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0, \operatorname{Re} p > 0} \int_0^\infty e^{-pt} t^2 u(x, t; q) dt; \quad x \in Y, \quad q \in Q. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В силу условия 2,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \tilde{g}(p) &= \int_0^\infty g(t) dt, \quad \lim_{p \rightarrow 0} \tilde{g}'(p) = - \int_0^\infty t g(t) dt, \\ \lim_{p \rightarrow 0} \tilde{g}''(p) &= \int_0^\infty t^2 g(t) dt. \end{aligned}$$

На основании теоремы Лебега о мажорируемой сходимости [5, с. 302] и леммы 1 заключаем, что предел левой части равенства (2.5) при $p \rightarrow 0$ равен

$$\begin{aligned} & v_{pp}(x, 0; q) - \int_0^\infty g(t) dt \int_{S(q)} G_{pp}(x, x'; 0) \varphi(x'; q) dx' + \\ & 2 \int_0^\infty t g(t) dt \int_{S(q)} G_p(x, x'; 0) \varphi(x'; q) dx' - \\ & - \int_0^\infty t^2 g(t) dt \int_{S(q)} G(x, x'; 0) \varphi(x'; q) dx'. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Первые два интеграла в правой части (2.5) для любых $x \in Y$, $q \in Q$ равномерно ограничены по p ($0 < |p| \leq \varepsilon$), так что при $p \rightarrow 0$ сумма первых двух слагаемых в этой части стремится к нулю. Далее,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} v(x, p; q) &= \lim_{p \rightarrow 0, \operatorname{Re} p > 0} \tilde{u}(x, p; q) = \\ &= \int_0^\infty g(t) dt \int_{S(q)} G(x, x'; 0) \varphi(x'; q) dx'. \end{aligned}$$

Для последнего интеграла в правой части (2.5) выполняется

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \int_R G(x, x'; p) v(x', p; q) \xi(x') dx' &= \\ &= \int_0^\infty g(t) dt \int_R \xi(x') G(x, x'; 0) \times \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\times \int_{S(q)} G(x', x''; 0) \varphi(x''; q) dx'' dx'; \quad x \in Y, \quad q \in Q.$$

Используя (2.7), (2.8), из (2.5) окончательно находим

$$\begin{aligned} & \int_R \xi(x') G(x, x'; 0) \int_{S(q)} G(x', x''; 0) \varphi(x''; q) dx'' dx' = \\ & = \left(\int_0^\infty g(t) dt \right)^{-1} \left(\frac{1}{2} v_{pp}(x, 0; q) - \frac{1}{2} \int_0^\infty g(t) dt \times \right. \\ & \times \int_{S(q)} G_{pp}(x, x'; 0) \varphi(x'; q) dx' + \\ & + \int_0^\infty t g(t) dt \int_{S(q)} G_p(x, x'; 0) \varphi(x'; q) dx' - \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_0^\infty t^2 g(t) dt \int_{S(q)} G(x, x'; 0) \varphi(x'; q) dx' \right) \quad \forall x \in Y \quad \forall q \in Q, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где выражение $v_{pp}(x, 0; q)$ определено в (2.6).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1, 2. Тогда функция $\xi = \xi(x)$ удовлетворяет уравнению (2.9).

Соотношение (2.9) представляет собой линейное интегральное уравнение первого рода относительно неизвестной функции $\xi(x)$, и для его решения применим широкий спектр численных методов.

3. Единственность решения интегрального уравнения. Для доказательства единственности решения уравнения (2.9) достаточно установить, что это уравнение имеет в классе $C(\bar{R})$ не более одного решения, что эквивалентно наличию только нулевого решения у соответствующего однородного уравнения.

Доказательство единственности проведем для схемы эксперимента по акустическому зондированию, определяемой следующим условием.

Условие 3. Положим $Q = \{q_{mn}\}$, $q_{mn} = (z_m, d_n)$, $z_m \in \Omega$, $d_n > 0$, $d_n \rightarrow 0$, где множество $\tilde{X} = \{z_m\}$ всюду плотно на поверхности $X \in C^2$, лежащей внутри Ω и не пересекающейся с \bar{R} , $\Sigma_R \equiv \partial R \in C^2$; $m, n \in \mathbb{N}$. Пусть, кроме того, Y — гладкая замкнутая поверхность, $Y \subset \Omega$, $Y \cap \bar{R} = \emptyset$; $S(q_{mn}) = O_{d_n}(z_m)$,

$$\int_{O_{d_n}(z_m)} \varphi(x; q_{mn}) dx = 1.$$

Рассмотрим соответствующее (2.9) однородное уравнение

$$\int_R \xi(x') G(x, x'; 0) \int_{S(q)} G(x', x''; 0) \varphi(x''; q) dx'' dx' = 0.$$

Из условия 3 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S(q_{mn})} G(x', x''; 0) \varphi(x''; q_{mn}) dx'' = G(x', z_m; 0)$$

$$\forall x' \in R \quad \forall z_m \in \bar{X}.$$

Таким образом, требуется установить, что уравнение

$$\int_R G(x, x'; 0) G(x', z; 0) \xi(x') dx' = 0 \quad \forall x \in Y \quad \forall z \in X \quad (3.1)$$

имеет в классе $C(\bar{R})$ только тривиальное решение.

Имеют место следующие утверждения [7, с. 41, 45].

Теорема 2. Семейство $\{G(x, z; 0)\}_{\forall z \in X}$ является полным в смысле метрики $L_2(R)$ на множестве $N_R(\Delta) \left\{ \mathbb{H} \in C^2(\bar{R}) : \Delta u(x) = 0, x \in R \right\}$.

Теорема 3. Семейство $\{G(x, y; 0)\}_{\forall x \in Y}$ является полным в $L_2(R)$ на множестве $N_R(\Delta)$.

Теорема 4. Семейство $\{u_1 u_2 : u_1, u_2 \in N_R(\Delta)\}$ полно в $L_2(R)$.

Из теоремы 4 с учетом теорем 2 и 3 следует, что семейство $\{G(x, x'; 0) G(x', z; 0)\}_{x \in Y, z \in X}$ полно в $L_2(R)$, поскольку $\Delta_x G(x, x'; 0) = \Delta_z G(x', z; 0) = 0$. Значит, уравнение (3.1) имеет только тривиальное решение $\xi \equiv 0$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 5. Пусть выполняются условия 1–3. Тогда уравнение (2.9) имеет единственное решение $\xi = \xi(x)$.

4. Численный эксперимент. Опишем результаты проведенного численного эксперимента. Считаем, что $\bar{\Omega}$ — параллелепипед и исследуемая неоднородность принадлежит параллелепипеду $\bar{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \Omega$. Функция $\varphi_{mn}(x) = \varphi_m(x)$, аппроксимирующая $\delta(x - z_m)$, выбирается согласно условию 3. С этой целью на $\bar{\Omega}$ строится равномерная кубическая сетка с шагом $h = 1$ и в качестве z_m выбирается один из ее узлов, при этом $\varphi_m(x) = 0,125$ в точке $x = z_m$ и в узлах, граничащих с z_m , $\varphi_m(x) = 0$ в остальных узлах. Полагаем $\sigma(x) \equiv 1$, $g(t) = t^5 e^{-t}$. Уравнение (2.9) с учетом конечности реального времени наблюдения и условия 3 аппроксимируем уравнением

$$\int_R G(x, x'; 0) G(x', z; 0) \xi(x') dx' = \left(\int_0^T g(t) dt \right) \times \left(\frac{1}{2} \int_0^T e^{-p_0 t} t^2 u(x, t; z) dt - \frac{1}{2} G_{pp}(x, z; 0) \int_0^T g(t) dt + G_p(x, z; 0) \int_0^T t g(t) dt - \frac{1}{2} G(x, z; 0) \int_0^T t^2 g(t) dt \right), \quad (4.1)$$

$$x \in Y, z \in X.$$

Здесь $G(x, z; 0)$ — функция Грина краевой задачи третьего рода для параллелепипеда $\bar{\Omega}$. Обозначив правую часть уравнения (4.1) через $\gamma(x, z)$, запишем это уравнение в операторной форме:

$$A\xi = \gamma; \quad \xi \in L_2(R), \quad \gamma \in L_2(Y \times X). \quad (4.2)$$

Для численного отыскания решения уравнения (4.2) использовался конечномерный вариант метода А. Н. Тихонова [2, с. 174]. В рамках этого метода уравнение (4.2) аппроксимируется семейством конечномерных экстремальных задач

$$\min \left\{ \|A\xi - \gamma\|_{L_2(Y \times X)}^2 + \alpha \|\xi\|_{L_2(R)}^2 : \xi \in L_N \right\}, \quad \alpha > 0. \quad (4.3)$$

Здесь

$$L_N = \left\{ \sum_{l,m,n=1}^N d_{lmn} \eta_l(x_1) \eta_m(x_2) \eta_n(x_3) : d_{lmn} \in \mathbb{R}^1 \right\},$$

$$\eta_s(x_j) = \sin \frac{\pi s(x_j - a_j)}{b_j - a_j}, \quad 1 \leq j \leq 3, \quad s \in N.$$

В рассматриваемом модельном примере реконструируемая акустическая неоднородность определяется функцией $\xi : R \rightarrow \mathbb{R}^1$ вида $\xi(x_1, x_2, x_3) = \xi_1(x_1) \xi_2(x_2) \xi_3(x_3)$, где

$$\xi_j(x_j) = \begin{cases} \bar{c}_j (x_j - a_j)^2 (x_j - 2\bar{a}_j + a_j)^2 (\bar{a}_j - a_j)^{-4}, & x_j \in [a_j, \bar{a}_j], \\ \bar{c}_j, & x_j \in [\bar{a}_j, \bar{b}_j], \\ \bar{c}_j (b_j - x_j)^2 (x_j - 2\bar{b}_j + b_j)^2 (b_j - \bar{b}_j)^{-4}, & x_j \in [\bar{b}_j, b_j], \end{cases}$$

$$\bar{a}_j = \frac{3a_j + b_j}{4}, \quad \bar{b}_j = \frac{a_j + b_j}{2}, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

В расчетах принималось $\bar{\Omega} = [-8, 8] \times [-8, 8] \times [-8, 8]$, источники X и приемники Y колебаний располагались в узлах равномерных сеток с единичным шагом на параллелепипедах $[-7, -4] \times [-6, -5] \times [-6, -2]$ и $[-2, 6] \times [-7, -5] \times [3, 6]$ соответственно; $\bar{R} = [-5, 5] \times [-4, 4] \times [-6, 6]$. Были выбраны следующие значения параметров задачи: $T = 20$, $p_0 = 0,01$; $\bar{c}_j = 0,9$, $1 \leq j \leq 3$. Для решения уравнения (4.1) использовался метод (4.3) при $\alpha = 0,01$, $N = 2$, интегралы по времени вычислялись методом Симпсона на равномерной сетке с шагом 0,5. На рисунках 1–3 представлены графики трех различных профилей искомым и восстановленной в результате решения задачи (4.2) функции $\xi = \xi(x)$. Показаны графики функций $\xi = \xi(x_1, 0, 0)$, $\xi = \xi(0, x_2, 0)$, $\xi = \xi(0, 0, x_3)$ для $x_1 \in [-5, 5]$, $x_2 \in [-4, 4]$, $x_3 \in [-6, 6]$ соответственно. На всех рисунках сплошными линиями показаны графики, соответствующие точному решению, штриховыми — графики, отвечающие полученному приближению к ξ .

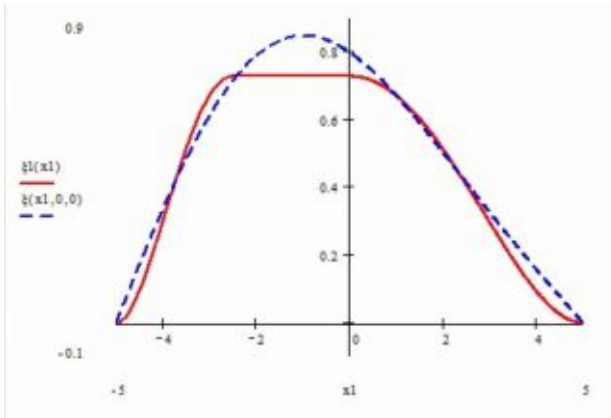


Рис. 1 — Сечения $\xi = \xi(x_1, 0, 0)$ искомой и восстановленной функции

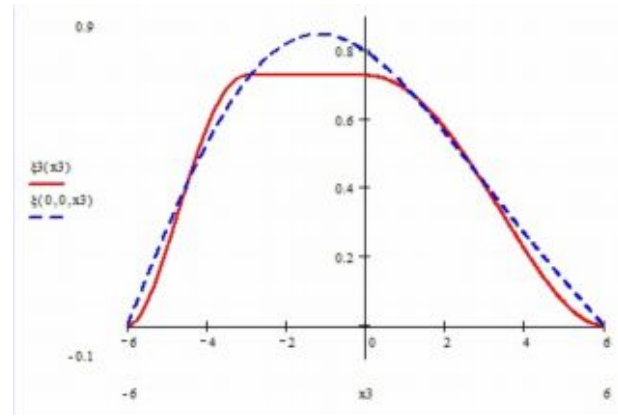


Рис. 3 — Сечения $\xi = \xi(0, 0, x_3)$ искомой и восстановленной функции

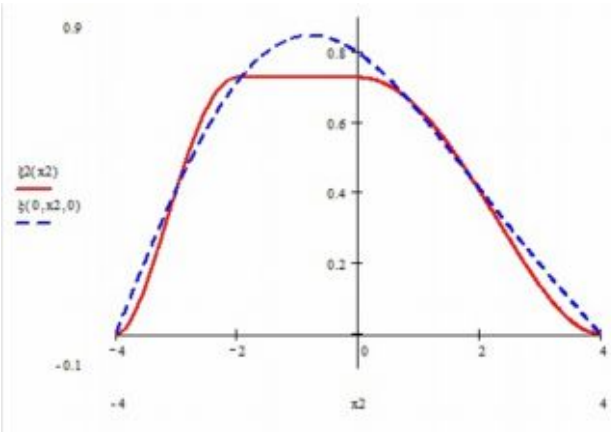


Рис. 2 — Сечения $\xi = \xi(0, x_2, 0)$ искомой и восстановленной функции

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю., Козлов А. И. Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 2003. — Т. 43. — № 8. — С. 1201–1209.
2. Иванов В. К., Васин В. В., Танава В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978. — 206 с.
3. Кокурин М. Ю. О редукции нелинейной обратной задачи для гиперболического уравнения на плоскости к линейному интегральному уравнению // Вычислительные методы и программирование. — 2009. — Т. 10. — № 2. — С. 114–119.
4. Кокурин М. Ю., Паймеров С. К. Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 2008. — Т. 48. — № 1. — С. 115–126.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 544 с.
5. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977. — 504 с.
6. Рамм А. Г. Многомерные обратные задачи рассеяния. — М.: Мир, 1994. — 496 с.